ΘΕΜΑ Α

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

(Α1) Απόδειξη

(Α2) Ορισμός

(Α3) Ορισμός

(Α4) Σ - Λ - Σ - Σ - Σ

ΘΕΜΑ Β

(Β1) Θέτουμε όπου x το $x-1$

$f(x-1+1) = (x-1+1)\cdot e^{-(x-1)}$

$\boxed{f(x) = x\cdot e^{1-x}}$

ή Θέτω $y = x+1$
$y-1 = x$

$f(y) = y\cdot e^{-(y-1)}$

$f(x) = x\cdot e^{1-x}$

(Β2) $f'(x) = e^{1-x} + x\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)'$

$f'(x) = e^{1-x} - x\cdot e^{1-x} = e^{1-x}\cdot(1-x)$

$f'(x) = 0 \to x = 1.$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\boxed{-\infty}$	$\nearrow$	$\boxed{1}$ Ο.Μ.	$\searrow$	$\boxed{0}$

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{1-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{e^{1-x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x-1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

B3. $f''(x) = (e^{1-x})' \cdot (1-x) + e^{1-x} \cdot (1-x)'$

$f''(x) = e^{1-x} \cdot (-1) \cdot (1-x) + e^{1-x} \cdot (-1)$

$f''(x) = e^{1-x} \cdot (-1+x-1)$

$f''(x) = e^{1-x} \cdot (x-2).$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2.$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ. $\boxed{2/e}$	$\smile$	

$f(2) = 2 \cdot e^{1-2} = \frac{2}{e}$

ασύμπτωτες

$D_f = \mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, άρα η $y=0$ είναι οριζόντια στο $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, πάμε για πλάγιες

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x} e^{1-x}}{\cancel{x}} = +\infty$ δεν έχει πλάγια στο $-\infty$.

B4. α) Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$ και $A_2 = (1, +\infty)$

$f(A_1) = (-\infty, 1]$ και $f(A_2) = (0, 1)$.

Άρα $f(A) = (-\infty, 1]$

β.

$-\infty \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

- Αν $\lambda<0$, $\lambda \in f(A_1)$, $\lambda \notin f(A_2)$ μία ρίζα
- Αν $0<\lambda<1$, $\lambda \in f(A_1)$, $\lambda \in f(A_2)$ δύο ρίζες
- Αν $\lambda>1$, $\lambda \notin f(A_1)$, $\lambda \notin f(A_2)$ καμία ρίζα
- Αν $\lambda=1$, $\lambda \in f(A_1)$, $\lambda \notin f(A_2)$ μία ρίζα
- Αν $\lambda=0$, $\lambda \in f(A_2)$, $\lambda \notin f(A_2)$ μία ρίζα

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$.

Θέτω $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x>0$

h συνεχής στο $[1,e]$

$h(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$

$h(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$.

$h(1)\cdot h(e) < 0$, άρα από Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (1,e)$ ώστε $h(x_0)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}$

$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x>0$

Άρα το x_0 μοναδικό.

Δ2. $\boxed{f(x)=(\ln x_0)\cdot(x+1)-\ln x+1}$ μπορώ με $f(x)=\frac{1}{x_0}\cdot(x+1)-\ln x+1$

$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x_0-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\ln x_0 \Leftrightarrow \boxed{x=x_0}$ από

το ερώτημα Δ1.

$f''(x)=+\frac{1}{x^2}>0$ άρα $f'\uparrow$, f κυρτή, $f(x)\geq$ εφαπτομένη.

Για $x>x_0 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)>f'(x_0) \Rightarrow f'(x)>0$.

Για $x<x_0 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x)<f'(x_0) \Rightarrow f'(x)<0$.

x	0	1	x_0	e	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\boxed{}$	$\searrow$	Ο.Ε. $\boxed{0}$	$\nearrow$	$\boxed{}$

$f(x_0)=(\ln x_0)(x_0+1)-\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}(x_0+1)-\frac{1}{x_0}-1$

$=\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{x_0}}-\cancel{\frac{1}{x_0}}-\cancel{1}=0.$

<u>Κρυφή</u> $f(x)\geq 0$ με ίσον μόνο για $x=x_0$.

Δ3. $g(x) = x\cdot e^{-x}$ $\qquad$ $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$

κοινό σημείο.

$g(x) = h(x)$

$x e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$

$\ln(x e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$

$\ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\cdot \ln \frac{x_0}{e}$

$\ln x - x = (x+1)\cdot \ln x_0 - (x+1)$

$\ln x \cancel{-x} = (x+1)\ln x_0 \cancel{-x} - 1$

$0 = (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 \iff f(x) = 0 \iff x = x_0$

από Δ2

Άρα το κοινό σημείο είναι το x_0.

Πρέπει $g'(x_0) = h'(x_0)$.

$g'(x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} \rightarrow g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = e^{-x_0}\cdot(1 - x_0).$

$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot \ln\frac{x_0}{e} \Rightarrow h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot \ln\frac{x_0}{e}.$

$\ln x_0 - \ln e$

Πρέπει $e^{-x_0}(1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot \ln\frac{x_0}{e}$ $\qquad$ $\frac{1}{x_0} - 1$

$e^{-x_0}(1 - x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\left(\frac{1}{x_0} - 1\right).$

$e^{-x_0}(\cancel{1-x_0}) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{\cancel{1-x_0}}{x_0}$ $\quad x_0 \neq 1$.

$x_0 \cdot e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$

$g(x_0) = h(x_0)$ το οποίο ισχύει.

Δ4. $AB = \sqrt{(\cancel{x-x})^2 + (f(x)-\varphi(x))^2}$

$AB = |f(x) - \varphi(x)|$

$AB = f(x) - \varphi(x)$.

Άρα $d(x) = f(x) - \varphi(x)$.

$d'(x) = f'(x) - \varphi'(x)$

Από Θ. Fermat $d'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$.

Όμως από $Δ_2$ $f'(x_0) = 0$. Άρα $\varphi'(x_0) = 0$

Άρα το x_0 κρίσιμο της $\varphi(x$

Θεμα Γ

$$f(x)=\begin{cases} ax^3-3x^2-x+1, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad a<-3$$

Γ1 Ειναι f συνεχως στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική και συνεχώς στο $(0,\frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική.

Στο $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$

Αρα f συνεχώς και στο 0, οπότε f συνεχώς στο $(-\infty,\frac{3\pi}{2}]$

Για παραγωγισιμοτητα:

Ειναι f παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{3\pi}{2})$ ως τριγωνομετρική

Στο $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(\alpha x^2-3x-1)}{\cancel{x}}=-1$$

Άρα f όχι παραγωγίσιμη στο 0.

$\boxed{\Gamma 2}$ i) Είναι f συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική.

Επίσης $f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

Άρα δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

ii) Για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ είναι

$$f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$$

Άρα $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\kappa\pi}, \kappa\in\mathbb{Z}$

Στο $(0,\frac{3\pi}{2})$ είναι

$0<\kappa\pi<\frac{3\pi}{2}$

$\boxed{0<\kappa<\frac{3}{2}}, \kappa\in\mathbb{Z}$

Άρα $\boxed{\kappa=1}$.

Οπότε το μοναδικό $\xi\in(0,\frac{3\pi}{2})$ είναι το οποίο δίνει $f'(\xi)=0$ το $\boxed{\xi=\pi}$

Γ3 Για $x<0$ είναι $f'(x)=3ax^2-6x-1$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3ax^2-6x-1=0$

$\Delta=\beta^2-4a\gamma=36+12a=12(3+a)<0$

διότι $a<-3 \Leftrightarrow a+3<0$

Άρα $f'(x)\neq 0$ στο $(-\infty,0)$ και άρα δεν υπάρχουν σημεία στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$

Γ4 Μάλιστα για $x \in (-\infty, 0)$ στην

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x + 1$$

το $3a < 0$ και $\Delta < 0$

άρα $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$

και f συνεχής στο 0 άρα

$f \searrow (-\infty, 0]$

Για $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ είναι

$$f'(x) = -\eta\mu x$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pi}$

x	0		π		$3\pi/2$
$f'(x) = -\eta\mu x$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\nearrow$	

Ο.Ε

Είναι $f'(x) \neq 0$ στα $(0,\pi)$ και $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ και συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο σε αυτά τα διαστήματα

• $f'(\frac{\pi}{6}) = -\eta\mu\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} < 0$

Άρα $f'(x) < 0$ για $x \in (0, \pi)$ και f συνεχής στα $0, \pi$ οπότε $f \searrow [0, \pi]$

Μάλιστα $f \searrow (-\infty, 0]$ όπως δείξαμε

άρα $f \searrow (-\infty, \pi]$

• $f'(\frac{7\pi}{6}) = -\eta\mu\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2} > 0$

Άρα $f'(x) > 0$ για $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ και f συνεχής στα $\pi, \frac{3\pi}{2}$ οπότε $f \nearrow [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο για $x = \pi$ το $f(\pi) = -1$

Οπότε ισχύει $f(x) \geq -1$ για $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$

με ισότητα μόνο για $\boxed{x = \pi}$

x	$-\infty$		0		π		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\boxed{1}$	$\searrow$		$\searrow$	$\boxed{-1}$	$\nearrow$	$\boxed{1}$
					O.E		